

## Huiswerkopgave Inleiding Modelleren – Hoofdstuk 6

In de videocollege 33 wordt een methode beschreven om de betrouwbaarheid vast te stellen van een model door gebruikmaking van gevoeligheidsanalyse. In deze opdracht voer je een gevoeligheidsanalyse uit voor een model van je eigen keuze.

Alvorens de volgende vragen te beantwoorden, moet je eerst het uitgewerkte voorbeeld aan het eind van dit document bestuderen. Uiteraard is het door jou gekozen voorbeeld volkomen verschillend van het hieronder uitgewerkte voorbeeld.

1. Verzin een gemodelleerd systeem naar keuze. Noem dit systeem  $S$ . Een doelstelling met betrekking tot  $S$  moet zijn *het nemen van een beslissing*. Een model van  $S$  bevat een cat.-II grootheid die afhangt van tenminste een cat.-I grootheid en tenminste een cat.-III grootheid. Om de doelstelling te vervullen moet de cat.-II grootheid met een gegeven absolute nauwkeurigheid bekend zijn. Beschrijf  $S$  en het model voor  $S$  dat je gebruikt.
2. Geef een plausibele motivatie voor de vereiste absolute nauwkeurigheid van de optredende cat.-II grootheden.
3. Gebruik makend van de theorie van videocollege 33, bereken de benodigde conditiegetallen.
4. Geef een interpretatie van de onnauwkeurigheden van alle optredende grootheden in categorieën I, II en III.

Zorg ervoor dat je model zo is dat tenminste één van de conditiegetallen afhangt van cat.-I en / of cat.-III grootheden.

In video lecture 33, a method is described for assessing the confidence in a model by means of sensitivity analysis. In this assignment, you perform a sensitivity analysis for a model of your own choice.

Before answering the following questions, first consult the elaborated example at the end of this document. Obviously, your chosen example should be very different from the example.

1. Imagine a modeled system of your choice. Call this system  $S$ . A purpose in relation to  $S$  should be *decision making*. A model of  $S$  contains a cat.-II quantity, depending on at least one cat.-I quantity and at least one cat.-III quantity. To fulfil the purpose, the cat.-II quantity needs to be known within a given absolute accuracy. Describe  $S$  and the model for  $S$  you are using.
2. Give a plausible motivation for the absolute accuracy in the cat.-II quantity.
3. Using the theory from video lecture 33, compute the required condition numbers.
4. Give an interpretation of the inaccuracies of all occurring cat.-I, III and III quantities.

Make sure that the model is such that at least one of the condition numbers depends on the cat.-I and / or cat.-III quantities.

## Voorbeelduitwerking

1. Ik ontvang een erfenis van 5000 €. Het is al lang mijn hartenwens om een keer een cruise te maken. Ik heb reisgidsen verzameld, en cruises van het soort dat ik zou willen maken blijken tussen 5900 € en 6300 € te kosten, in andere woorden  $6100 \pm 200$  €. Ik zal dus mijn erfenis op de bank moeten zetten om een paar jaar gaan sparen. Hoe lang moet ik sparen?
  - de cat.-II grootheid is het gewenste eindkapitaal,  $U$ , van 6100 €, dat ik moet weten met een relatieve nauwkeurigheid van  $\pm 200 / 6100 = \pm 3.2\%$  ;
  - de cat.-III grootheden zijn
    - het startkapitaal,  $S$ , van 5000 €;
    - de rente,  $R$ , die de bank geeft, dit percentage ligt nu tussen 2% en 2.5%, in andere woorden  $0.0225 \pm 0.0025$ ;
  - de cat.-I grootheid is het aantal jaren,  $N$ , dat ik het geld op de bank laat staan.
  - De formule voor de relatie  $U = f(S,R,N)$  is  $U = S \cdot (1+R)^N$ .  
 $S$  is het startkapitaal; de factor  $(1+R)^N$  vertegenwoordigt de toename t.g.v. samengesteld interest over de jaren. We evalueren de formule voor de gemiddelde waarde van grootheid  $R = 0.0225$ , en vinden dan  $N = 8$ . Dat wil zeggen: ik moet mijn geld 8 jaar laten staan.
2. Cruises die ik interessant vindt kosten tussen 5900 en 6300 €.
3. De conditiegetallen zijn
  - a.  $cn_S = (S/U) \partial f / \partial S = 1$
  - b.  $cn_R = (R/U) \partial f / \partial R = NR / (1+R) = 0.176$
  - c.  $cn_N = (N/U) \partial f / \partial N = N \ln(1+R) = 0.178$
4. Als volgt:
  - a. De (relatieve) onzekerheid van  $S$  is 0.
  - b. The relatieve onzekerheid van  $R$ ,  $\Delta R/R$ , is  $0.0025 / 0.0225 = 0.11$ . Deze onzekerheid wordt veroorzaakt door het gegeven dat ik nog niet besloten heb op welke bank ik mijn geld zal zetten. Verschillende banken geven verschillende rentepercentages.
  - c. De relatieve onnauwkeurigheid van  $N$ ,  $\Delta N/N$  volgt uit de formule voor conditiegetallen:
$$\begin{aligned} \Delta U/U &= ((cn_S \cdot 0)^2 + (cn_R \cdot 0.11)^2 + (cn_N \cdot \Delta N/N)^2)^{1/2} \\ &= (0 + (0.176 \cdot 0.11)^2 + (0.178 \cdot \Delta N/N)^2)^{1/2} \\ &= (0.00037 + (0.178 \cdot \Delta N/N)^2)^{1/2}. \end{aligned}$$
We concluderen:
    - i. The relatieve onnauwkeurigheid van  $U$  kan niet kleiner zijn dan  $\sqrt{0.00037} = 0.019$ , dit is een marge van 1.9%. Die is kleiner dan de gewenste marge van 3.2%, dus kan mijn model nauwkeurig genoeg zijn, vooropgesteld dat ...
    - ii. ... vooropgesteld dat de waarde van de bijdrage  $(0.178 \cdot \Delta N/N)^2$  klein is vergeleken met 0.00037, d.w.z  $\Delta N$  is klein vergeleken met 0.108  $N$ . Voor  $N=8$  jaar, is de marge daarom ongeveer 10 maanden.

## Example Elaboration

1. I receive an inheritance of 5000 €. It has been since long my heart desire to make a cruise. I have been collecting brochures of travel agencies, and cruises of the kinds I would like to make range from 5900 € to 6300 €, that is  $6100 \pm 200$  €. So I will have to put my inheritance to the bank and save a couple of years. How long do I need to save?
  - the cat.-II quantity is the desired end capital,  $U$ , of 6100 €, which I need to know with a relative accuracy of  $\pm 200 / 6100 = \pm 3.2\%$  ;
  - the cat.-III quantities are
    - the starting capital,  $S$ , of 5000 €;
    - the interest rate,  $R$ , of the bank, current interest rates are between 2% and 2.5%, that is  $0.0225 \pm 0.0025$ ;
  - the cat.-I quantity is the amount of years,  $N$ , I'll put the money on the bank.
  - The formula to express  $U = f(S,R,N)$  reads  

$$U = S \cdot (1+R)^N$$

Indeed:  $S$  is the starting capital; the factor  $(1+R)^N$  accounts for the increase over the years due to compound interest. We evaluate the formula for the average value of the quantity  $R = 0.0225$  Then I find  $N = 8$ . In other words, I have to save my money for 8 years.
2. The cruises I find interesting cost between 5900 and 6300 €.
3. The condition numbers are
  - a.  $cn_S = (S/U) \partial f / \partial S = 1$
  - b.  $cn_R = (R/U) \partial f / \partial R = NR / (1+R) = 0.176$
  - c.  $cn_N = (N/U) \partial f / \partial N = N \ln(1+R) = 0.178$
4. As follows:
  - a. For  $S$  the (relative) inaccuracy is 0.
  - b. The relative inaccuracy of  $R$ ,  $\Delta R/R$ , is  $0.0025 / 0.0225 = 0.11$ . This uncertainty is due to the fact that I haven't made up my mind about the bank where I'll deposit my money: different banks give different interest rates.
  - c. The relative inaccuracy of  $N$ ,  $\Delta N/N$  follows from formula for condition numbers:
 
$$\begin{aligned} \Delta U/U &= ((cn_S \cdot 0)^2 + (cn_R \cdot 0.11)^2 + (cn_N \cdot \Delta N/N)^2)^{1/2} \\ &= (0 + (0.176 \cdot 0.11)^2 + (0.178 \cdot \Delta N/N)^2)^{1/2} \\ &= (0.00037 + (0.178 \cdot \Delta N/N)^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

We conclude:

    - i. The relative inaccuracy of  $U$  cannot be less than  $\sqrt{0.00037} = 0.019$ , this is a margin of 1.9%. This is less than the desired margin of 3.2%, so my model can be accurate enough, provided that ...
    - ii. ... provided that the value of the contribution  $(0.178 \cdot \Delta N/N)^2$  is small compared to 0.00037, so  $\Delta N$  is small compared to 0.108  $N$ . With  $N=8$  years, the margin is therefore about ten months.